

Simulation und Animation von Wolken mit Fraktalen¹

Diemar Saupe

Institut für Dynamische Systeme

Fachbereich Mathematik und Informatik

Universität Bremen

2800 Bremen-33

Abstract

Eine Methode zur Simulation und Animation von Wolken mit Hilfe von stochastischen fraktalen Funktionen mit drei oder vier Variablen wird vorgestellt. Diese ermöglichen die Visualisierung von Effekten wie Entstehung und Auflösung von Wolkenfeldern, Evolution von Wolken und Einflüsse von Wind. Die Realisierung von stochastischen fraktalen Funktionen erfolgt mittels der Rescale-and-Add-Methode, die es erlaubt, in relativ kurzer Zeit Bilder und Animationen zu erzeugen. Auf einer typischen Workstation ist eine Entwicklungsumgebung für entsprechende Animationen mit interaktivem Previewing implementiert. Ein kurzer Videofilm wurde hergestellt.

1 Einführung

Bei der Generierung natürlich aussehender Computerbilder von Landschaften, Bäumen, Häusern usw. ist es notwendig, auch Himmel, Wolken und Sonnenschein einzubeziehen. In dieser Arbeit werden Methoden zur Animation von Wolkenstrukturen entwickelt. Es werden dabei folgende Effekte berücksichtigt:

- Entstehung und Auflösung von Wolkenfeldern,
- Evolution von Wolken an sich,
- Veränderung von Wolken durch äußere Einflüsse, z. B. Wind.

Zumindest für Standbilder sind in der Literatur bzw. in den *Technical Slide Sets* der SIGGRAPH Jahrestagungen schon beeindruckende Wolkenbilder enthalten. Die verwendeten Methoden spannen den Bogen von heuristischen, möglichst schnellen ad-hoc-Verfahren bis hin zu physikalisch orientierten Simulationen mit aufwendiger Berechnung von Lichtabsorption und -reflektion. Die Simulationen von Lovejoy und Mandelbrot [6] gründen sich auf eine Modellierung durch die von Mandelbrot vertretene fraktale Geometrie. Dabei werden Wolken als stochastisch fraktale Funktion in zwei Veränderlichen realisiert. Auf diesen Ansatz gründen sich auch die Bilder von Boger, Feder und Jossang in [2] und des Verfassers in [9, 10] mit anderen Algorithmen zur Erzeugung fraktaler Modelle. Wir werden diesen Ansatz im folgenden unter dem Aspekt der Animation betrachten. Voss [12, 13] wendet sogar dreidimensionale Dichtefelder in Zusammenhang mit entsprechenden Beleuchtungsmodellen an. Diese physikalische Modellierung von Wolkenstrukturen und Lichtausbreitung liefert die besten Ergebnisse, ist aber aufwendig und daher für Animationszwecke zunächst nur sehr eingeschränkt anwendbar. Weiterhin sind die Arbeiten von Gardner [3,4] interessant, in denen die Modellbildung mittels geeigneter Funktionen auf die Wolken umfassenden Ellipsoiden stattfindet. Beim Aufbau eines Bildes werden diese Funktionen benutzt, um in Ellipsen Transparenzeigenschaften der Wolken zu berechnen. In diesem Artikel werden wir den Schwerpunkt der Diskussion auf zweidimensionale Modelle legen und auch nur diese implementieren und animieren.

Diese Arbeit ist folgendermaßen organisiert: Im nächsten Abschnitt referieren wir ein Verfahren zur Generierung von stochastischen, fraktalen Funktionen mehrerer Veränderlicher, das kürzlich vom Verfasser in [11] angegeben worden ist. Dieses wird die Grundlage für ein Wolkenmodell sein. Im darauffolgenden, dritten Abschnitt nutzen wir die Parameter und Variablen in dem Wolkenmodell, um Animationen für die

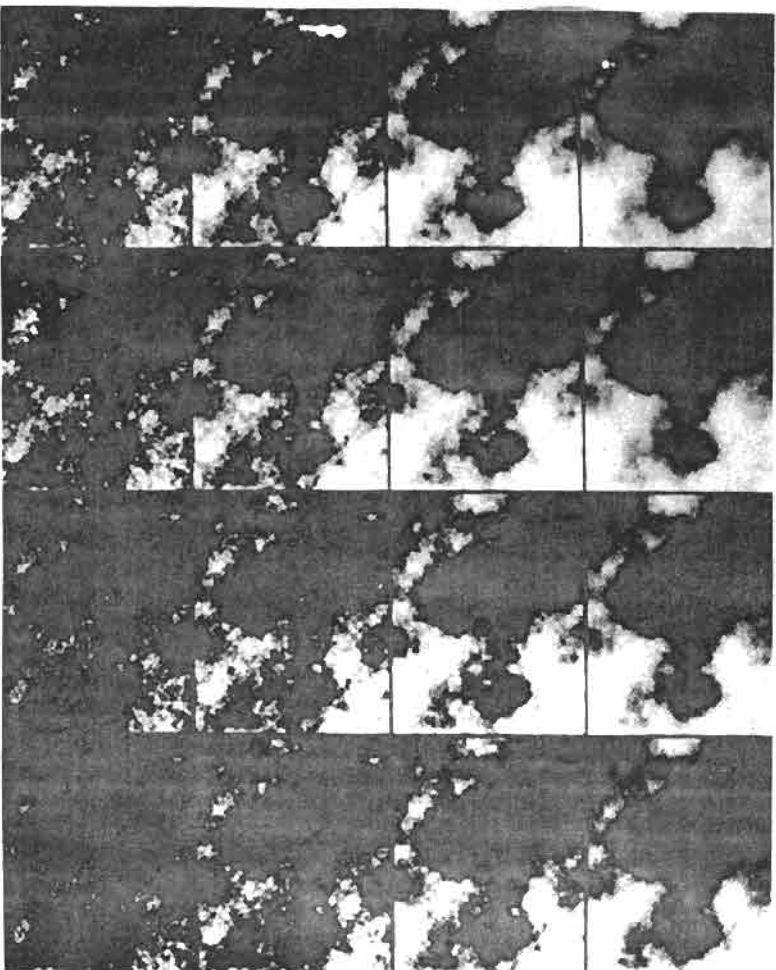


Bild 1: Veränderliche fraktale Dimension, Animation gemäß Gleichung (6). Der Wert H variiert von 1.0 im ersten Bild bis 0.0 im letzten Bild. Die Dimension der Wolkenränder nimmt also zu von 1.0 bis 2.0, siehe Bild 2.

oben angeführten Effekte zu entwickeln. Der vierte Abschnitt enthält Erläuterungen zu den möglichen bildlichen Umsetzungen der Animationen, sowie Resultate der Implementierung. Der nächste Abschnitt spricht das Problem an, die Wolken realistischer als dreidimensionale geometrische Formen zu modellieren und definiert auch für diesen Fall die entsprechenden Animationen. Im letzten Teil der Arbeit geben wir eine Zusammenfassung, nennen einige Erweiterungen für zukünftige Entwicklungen und erläutern, wie die dargestellten Verfahren als Werkzeuge in Entwurfsbeispielen integriert werden können.

2 Stochastische Fraktale als Wolkenmodelle

Als stochastische Fraktale bezeichnen wir stochastische Prozesse $V(\mathbf{x})$ in mehreren Variablen $\mathbf{x} = (x, y, \dots)$ für die gilt:

- Die Zuwächse $V(\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})$ sind Gauss'sche Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0.
- Die Varianz der Zuwächse $V(\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})$ hängt nur von der Entfernung $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ der Punkte \mathbf{x} und \mathbf{y} ab. Es gibt einen Parameter H mit $0 \leq H \leq 1$ und

$$E\{|V(\mathbf{y}) - V(\mathbf{x})|^2\} \propto \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^{2H} \quad (1)$$

wobei E den Erwartungswert

¹ erscheint im Tagungsband der GI Jahresagung, 1989, Fachberichte Informatik, Springer-Verlag

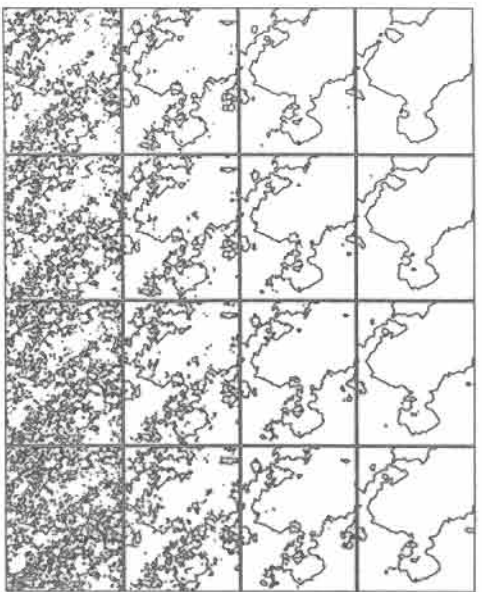


Bild 2: Die Ränder der Wolkenfelder aus Bild 1.

Der Prozess $V(x)$ hat stationäre Zuwächse und ist isotrop, d. h. alle Punkte und alle Richtungen sind statistisch äquivalent. Die fraktale Dimension des Graphen einer Realisierung von $V(x)$ beträgt $D = n + 1 - H$, wobei n die Anzahl der Variablen von V ist.

Die Theorie der stochastischen Fraktale ist in [7,13] beschrieben, und für die Generierung dieser Fraktale mit Computern gibt es viele Algorithmen, siehe [10,13]. Bei der Simulation und Animation von Wolken benutzen wir stochastische Fraktale in zwei, drei oder vier Variablen. Die Anwendung fraktaler Modellierung stützt sich auf die empirischen Untersuchungen von Lovejoy und Mandelbrot, siehe [6]. Ein Algorithmus, der auch bei drei oder vier Variablen hinreichende Effizienz und akzeptablen Speicherplatzbedarf hat, ist die *Rescale-and-Add-Methode* aus [11], deren wesentlichen Definitionen wir im folgenden kurz angeben.

Sei $S_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reelle Funktion, deren Werte auf dem ganzzahligen Gitter Z^n von \mathbb{R}^n durch Gauß'sche Zufallszahlen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1 definiert seien. S_n sei dann fortgesetzt zu einer glatten Funktion, die diese Werte interpoliert. Sei ferner $\tau > 1$, $0 \leq H \leq 1$ und

$$V_n(x) = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{1}{\tau^k H} S_n(\tau^k x). \quad (2)$$

Dann ist V_n näherungsweise ein stochastisches Fraktal, dessen Graph die Dimension $D = n + 1 - H$ hat. Der Parameter $\tau > 1$ bestimmt die Lakanarität. In der Praxis ist die Summation über Zahlen $k_0 \leq k \leq k_1$ auszuführen. Dabei ist k_0 so klein zu wählen, daß der Definitionsbereich, in dem V ausgewertet werden soll, in etwa die Ausdehnung τ^{-k_0} hat. Die obere Grenze k_1 bestimmt die höchsten Frequenzen, die in die Summe für V_n eingehen. Motivation, Analyse und Hinweise zur Implementierung dieses Verfahrens sind in [11] gegeben. Die wichtigsten Vorteile der Rescale-and-Add-Methode sind:

- Die fraktale Dimension muß nicht fest vorgegeben werden, sondern sie kann vom Ort x abhängen, d. h. H ist eine Funktion von x .
- Die Auswertung von V kann punktweise erfolgen. Das ergibt große Rechenzeitersparnisse, wenn z. B. das Fraktal nur auf einer Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ausgewertet wird.
- Die meisten anderen Methoden benötigen Speicherplatz proportional zu N^n , wobei N die Auflösung in einer Dimension bezeichnet, also z. B. $N = 1024$ für ein Bild mit 1024×1024 Pixeln. Die Rescale-and-Add-Methode kommt mit M^n Speicherplätzen ($M \leq 50$) für die Zufallszahlen in Tabellenform aus.

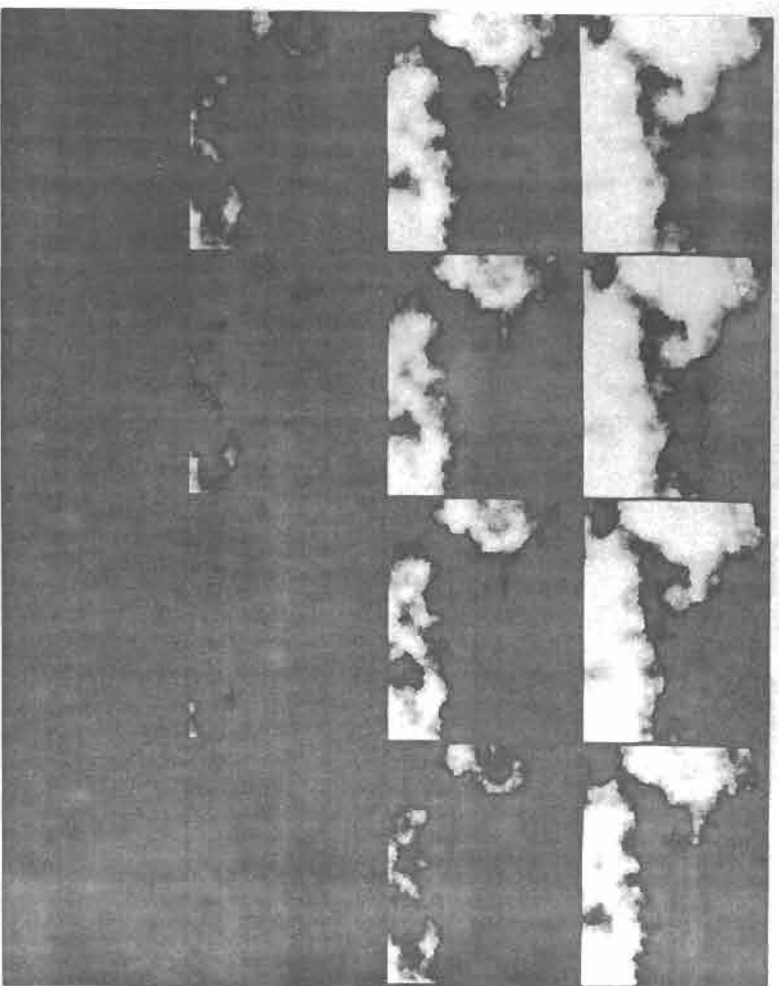


Bild 3: Variation des Schwellenwertes V_c . Animation gemäß Gleichung (5). Der Wert H ist 0,8.

- Die Methode ist einfach zu implementieren.

Eine interessante Variante des Verfahrens ist kürzlich von Musgrave, Kolb und Mace in [5] entwickelt worden. Dort ist u. a. die fraktale Dimension des Graphen von V in Abhängigkeit von dem Wert von V gesetzt. Dies ermöglicht bei der Modellierung von Terrain die Erzeugung schroffer Berge zusammen mit glatten Tälern in einem Bild.

Für unsere Anwendung interpretieren wir die Werte von V als Konzentration von Wasserdampf in der Atmosphäre. Die Kondensation des Dampfes tritt ein, wenn die Konzentration V einen Schwellenwert V_c überschreitet. Die Lichtabsorption A sei dann proportional zur Differenz $V - V_c$.

Wir beschreiben uns zunächst auf ein zweidimensionales Wolkenmodell, d. h. die Absorption A hängt ab von zwei Ortsvariablen u, v sowie der Zeit t :

$$A = A(u, v, t).$$

Gemäß unserer obigen heuristischen Interpretation von stochastischen Fraktalen setzen wir $n = 3$ und $V = V_3 = V_3(x, y, z; \tau, H)$

$$A(u, v, t) = \max(0, V(x, y, z; \tau, H) - V_c), \quad (3)$$

wobei x, y, z, H, V_c als Funktionen von u, v, t angesehen werden. Die dritte Ortsvariable z benötigen wir für Animationszwecke, wie im folgenden ausgeführt wird.

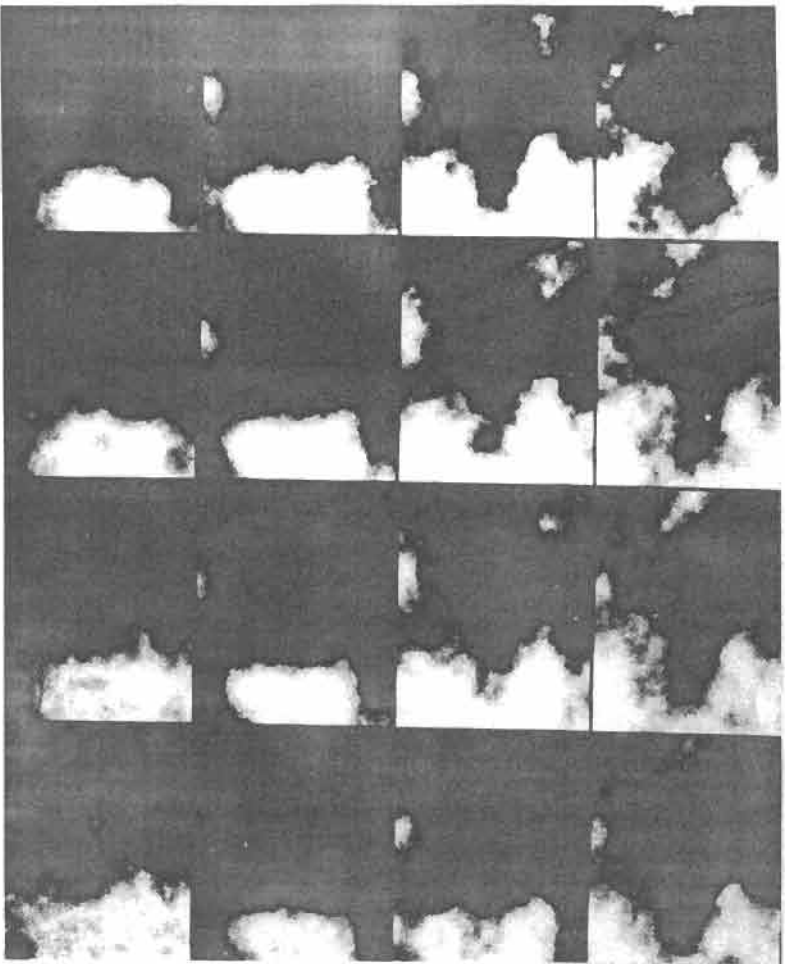


Bild 4: Wolkenanimation gemäß Gleichung (7) als Schnitte durch ein fraktales dreidimensionales Absorptionfeld. Der Wert H ist 0.8. Die x - und y -Werte in jedem Bild sind aus einem Rechteck der Größe 1.2×1.0 , während der z -Wert von Bild zu Bild um 0.05 zunimmt.

3 Animation des Modells

Die einfachsten Animationen ergeben sich, wenn wir die Ortsfunktionen x, y, z zeitunabhängig gestalten, nämlich

$$\begin{aligned} x(u, v, t) &= u, \\ y(u, v, t) &= v, \\ z(u, v, t) &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Entstehung bzw. Auflösung der Wolkenfelder erreichen wir nun durch Variation des Schwellenwertes V_c :

$$V_c(u, v, t) = V_0 + \Delta V_c \cdot t. \quad (5)$$

Wählen wir beispielsweise $V_0 > 0$ groß genug und $\Delta V_c < 0$, so haben wir für $t = 0$ keine Wolken (Schwellenwert zu hoch) und mit wachsendem t zunächst kleine, vereinzelte Wolken, die dann wachsen und sich schließlich zu einer festen Wolkendecke für alle u, v zusammenfügen. Wolkenauflösung wird durch den umgekehrten Prozeß simuliert, siehe Bild 3. In einer Implementierung auf einer Graphikworkstation mit Pseudofarbtabellen kann diese Animation noch sehr einfach als Manipulation der Farbtabellen realisiert werden.

Der Schwellenwert V_c läßt sich auch dazu benutzen, bestimmte Teile einer Landschaft, z. B. hohe Berge wolkenfrei, oder, im Gegenteil, mit besonders vielen Wolken zu gestalten. Dazu interpretieren wir die

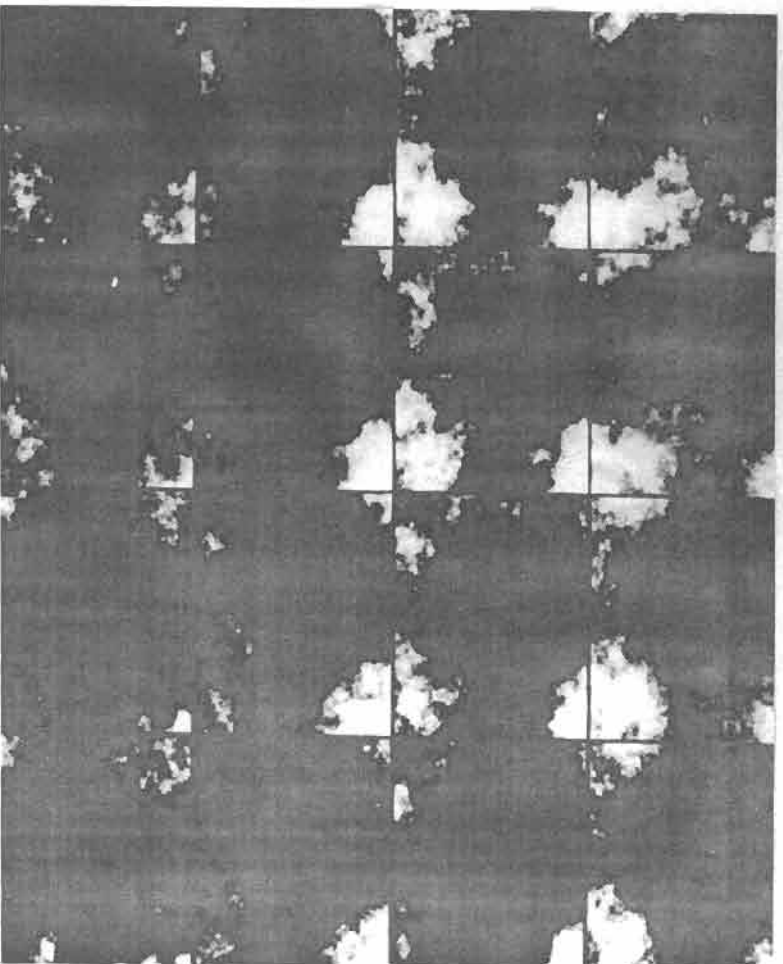


Bild 5: Die Animation von Bild 4 ist hier mit $H = 0.4$ wiederholt.

generierten Bilder als Aufsicht, d. h. u und v als Ortskoordinaten der abgebildeten Landschaft. Wenn $h(u, v)$ eine entsprechende Höhenfunktion darstellt (sie kann auch als stochastisches Fraktal gewonnen werden), können wir z. B.

$$V_c(u, v) = V_0 + (h(u, v) - h_0) \cdot \Delta V_c$$

setzen. Der Schwellenwert ist dann über den "Bergen" von $h(u, v)$ besonders hoch und garantiert bei geeigneter Wahl von V_0, h_0 und ΔV_c , daß dort keine Wolken entstehen.

Eine weitere einfache Animation besteht in der Variation des Parameters $0 \leq H \leq 1$, der die (fraktale) Dimensionalität der erzeugten Wolken kontrolliert:

$$H(u, v, t) = H(t). \quad (6)$$

Große Werte von H liefern relativ glatt berandete Wolkenstrukturen, während kleinere Parameterwerte von H die Wolken dramatischer gestalten. Die Untersuchungen in [6] ergaben, daß typische Parameterwerte von H in der Natur bei 0.6 bis 0.7 liegen.

Wir versuchen durch Einbeziehung der z -Koordinate die Wolkenstrukturen stärker zu verändern. Dabei nehmen wir an, daß sich Wolkenstrukturen in der Zeitdimension ebenso verhalten wie im Raum, d. h. daß die Koordinaten u, v, t äquivalent zu betrachten sind. Diese Annahme ist durch Radar- und Satellitenmessungen bestätigt worden und Grundlage der fraktalen Wolken- und Regenmodelle in [6]. Also modifizieren wir (4) zu

$$\begin{aligned} x(u, v, t) &= u, \\ y(u, v, t) &= v, \\ z(u, v, t) &= t \cdot \Delta z. \end{aligned} \quad (7)$$

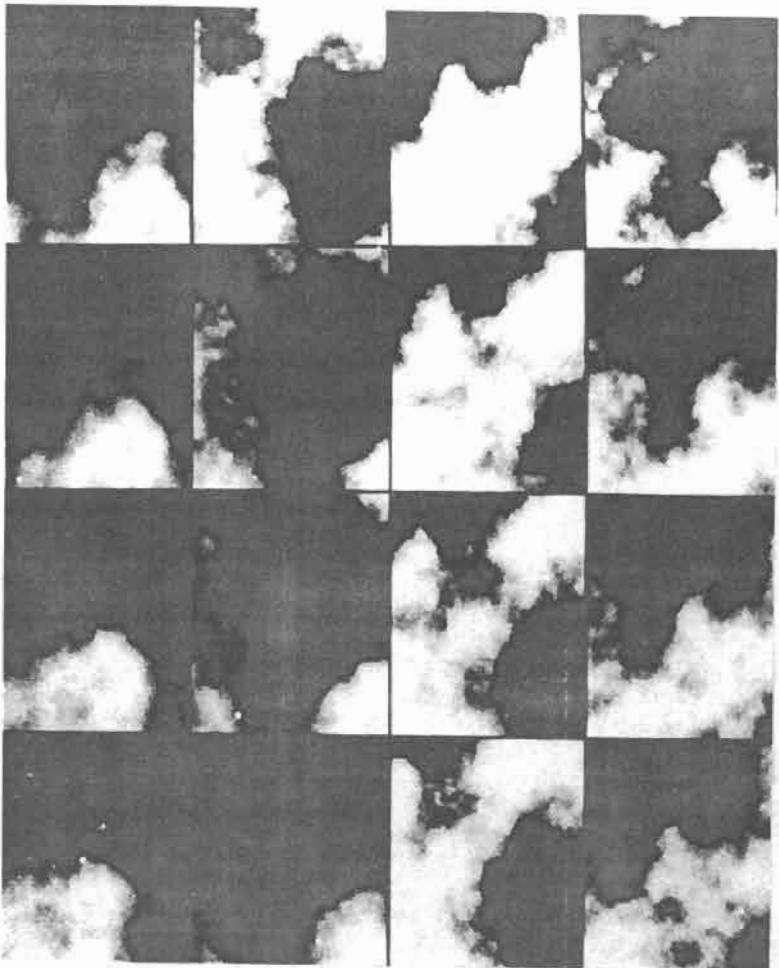


Bild 6: Animation gemäß Gleichung (8) zur ersten Simulation von Wind. Der Wert H ist 0.8. Wir haben x - und y -Werte wie in Bild 4 und $\Delta x = \Delta y = 0.1$ sowie $\Delta z = 0.05$ bei einem Bild pro Zeiteinheit.

Dies liefert eine stetige Transformation des Absorptionsfeldes $A(u, v, t)$. Der Faktor Δz bestimmt die Geschwindigkeit der Veränderung. Eine Erweiterung von (7) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} x(u, v, t) &= u + t \cdot \Delta x, \\ y(u, v, t) &= v + t \cdot \Delta y, \\ z(u, v, t) &= t \cdot \Delta z. \end{aligned} \quad (8)$$

Der Effekt ist eine zusätzliche Verschiebung (wie etwa durch konstanten Wind verursacht) in Richtung des Vektors $(\Delta x, \Delta y)$ (siehe Bild 4 und 5). Wir können die Verschiebung komplex gestalten durch Addition von weiteren fraktalen Funktionen W_x und W_y in jeweils drei Veränderlichen:

$$\begin{aligned} x(u, v, t) &= u + t \cdot \Delta x + \epsilon W_x(u, v, \mu t), \\ y(u, v, t) &= v + t \cdot \Delta y + \epsilon W_y(u, v, \mu t), \\ z(u, v, t) &= t \cdot \Delta z. \end{aligned} \quad (9)$$

Der Parameter ϵ steuert dabei wie stark die Position eines Punktes vor der Auswertung der fraktalen Funktion $V(x, y, z)$ perturbiert wird. In Bild 7 und 9 ergeben sich hieraus Effekte, die wir als Wölkerverwehungen interpretieren kann. Bei $\mu \neq 0$ hängt die Perturbation von V zusätzlich fraktal von der Zeit t ab. Schieblich können alle oben aufgeführten Animationen miteinander kombiniert werden.

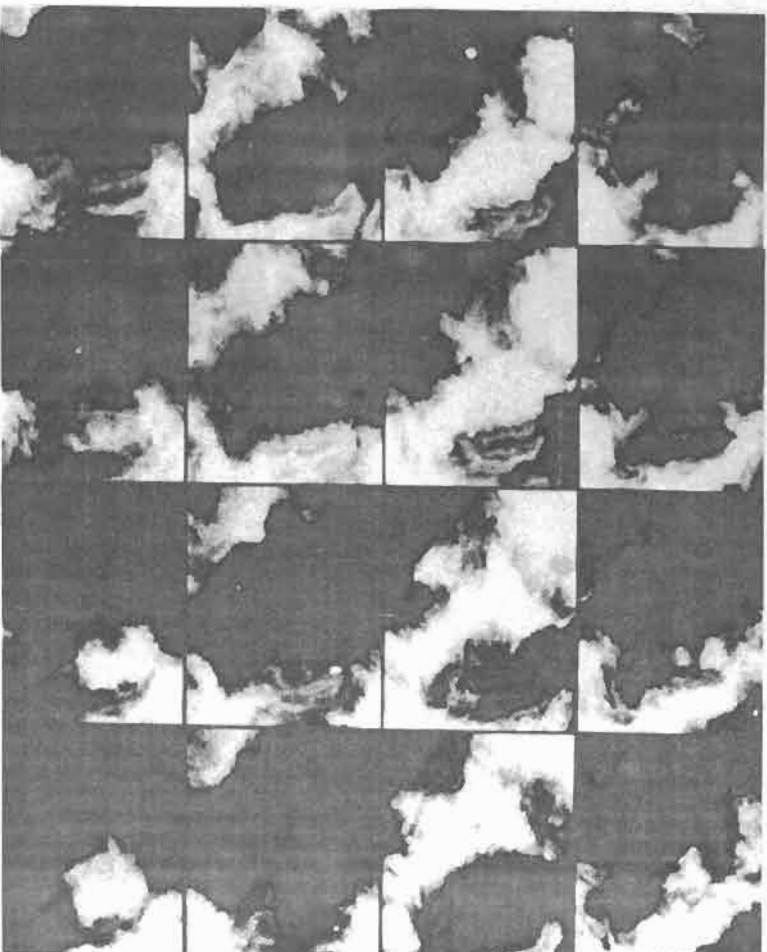


Bild 7: Zweite Animation von Wolken mit Wind, Gleichung (9). Offensichtlich sind die Wolken durch diesen Ansatz verwirbelt. Der Wert H ist 0.8. Die weiteren Parameter sind $\Delta x = \Delta y = 0.1$, $\epsilon = 0.3$ und $\mu = 0.0$.

4 Die bildliche Umsetzung

Um die Wolken in einer Animation bezüglich Gestalt und Wandel zu studieren, genügt eine einfache Form der Darstellung. Die Bildschirmkoordinaten entsprechen den Variablen u und v , die Farbwerte zur Absorption $A(u, v, t)$ werden - wie schon erwähnt - über eine Pseudofarbtabelle definiert. Punkte mit $A \leq V_t$ werden blau gefärbt, Punkte mit $A > V_t$ erhalten eine Farbe zwischen blau und weiß, je nach Größe von A . Es reicht aus, in einem Bild nur Punkte auf einem Gitter zu berücksichtigen und für die verbleibenden Pixel multilineare Interpolation, d. h. das Gouraud-Shading-Verfahren anzuwenden. Die Bilder dieses Artikels sind Fotogrammetrien direkt vom Bildschirm mit einer Auflösung von 1280×1024 Pixeln. Jedes Einzelbild der Kompositionen wurde an 152×128 Punkten berechnet. Der Parameter r ist in allen Bildern gleich 2. Die Rechenzeit für die Ermittlung dieser Daten inklusive der graphischen Darstellung beträgt auf einer kleinen, aber modernen Workstation (IRIS 4D/20) ca. 30 Sekunden. Für die Produktion des Videofilms mit den hier gezeigten Bildern ist es somit nicht nötig, diese Bilder im Voraus zu berechnen und auf Speichermedien (Magnetplatte oder -band) zu übertragen, da auch bei einer Einzelbildanimation die Aufnahmebeschwindigkeit ca. 30 Sekunden pro Bild beträgt.

Das zweidimensionale Modell von Wölkensfeldern läßt sich auch für Landschaftsbilder etc. als künstlicher Himmel verwenden. Als Beispiel sei das Titelbild von "The Science of Fractal Images" [8] genannt, siehe Bild 10. Der Himmel kann als unendlich große Ebene mit einer durch $A(u, v, t)$ gegebenen Textur dargestellt

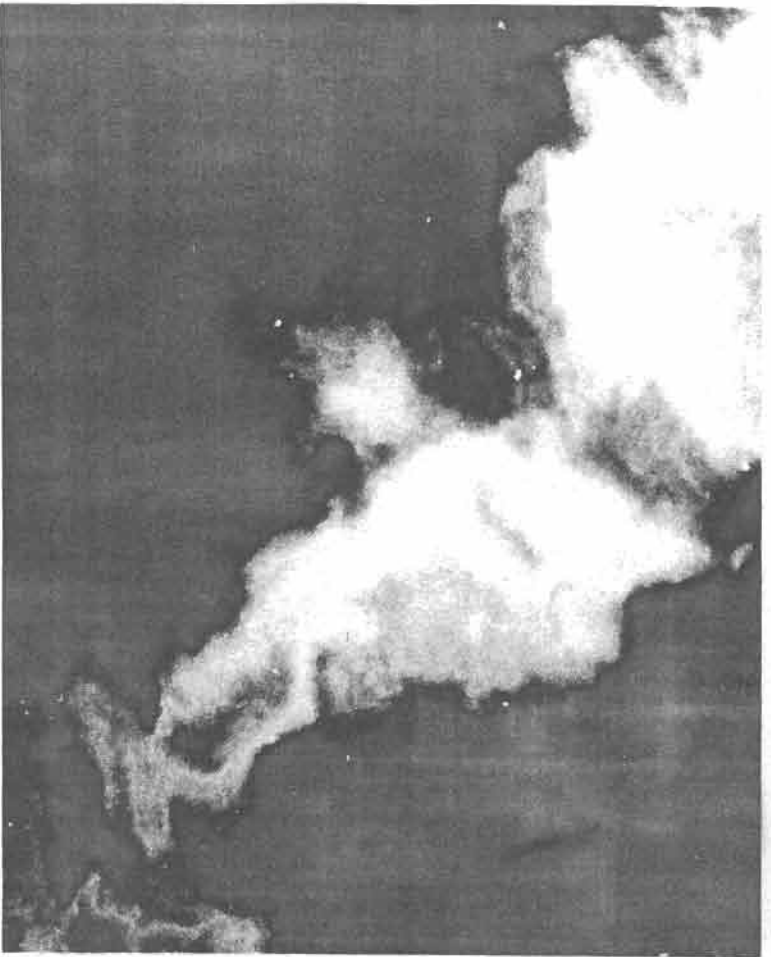


Bild 8: Exemplarische Vergrößerung des sechsten Teilbildes von Bild 7.

werden. Zusätzliche Effekte wie Dunst (weit entfernte Wolken erscheinen diffus), besondere Beleuchtungsverhältnisse (Gegenlicht usw.), weich berandete Schatten der Wolken (Projektion des Feldes $A(u, v, t)$ auf die Landschaft) sind möglich. Bei dieser Darstellungsweise tritt das Aliasing-Problem in natürlicher Weise in der Nähe des Horizontes auf. Dort können nämlich die Wolken auf Flächen der Größenordnung eines Pixels oder weniger projiziert werden. Das Problem läßt sich durch verschiedene Maßnahmen beheben: 1. Hinzugefügter Dunst verwischt die Konturen. 2. Simulation der Erdkrümmung verschiebt den Horizont ins Endliche. 3. Bei der Generierung der stochastischen Fraktale wird die obere Grenze k_i in der Summation in (2) entsprechend herabgesetzt. In dieser Weise werden also nur hinreichend grobe Strukturen berücksichtigt. 4. Es lassen sich auch die üblichen Verfahren des "Supersampling" zum Antialiasing im Rahmen von Strahlverfolgungsmethoden (Raytracing) einsetzen.

5 Erweiterung des Modells um eine Dimension

Der nächste — allerdings aufwendige — Schritt ist die physikalisch zutreffendere Simulation von Absorptionseffekten mit drei Orts- und einer Zeitvariablen. Wenn $V = V_4(x, y, z, \alpha; \tau, H)$ ein stochastisches Fraktal mit vier Variablen x, y, z, α und zwei Parametern τ, H bezeichnet, so setzen wir in Analogie zu (3)

$$A(u, v, w, t) = \max(0, V(x, y, z, \alpha; \tau, H) - V_2) \quad (10)$$

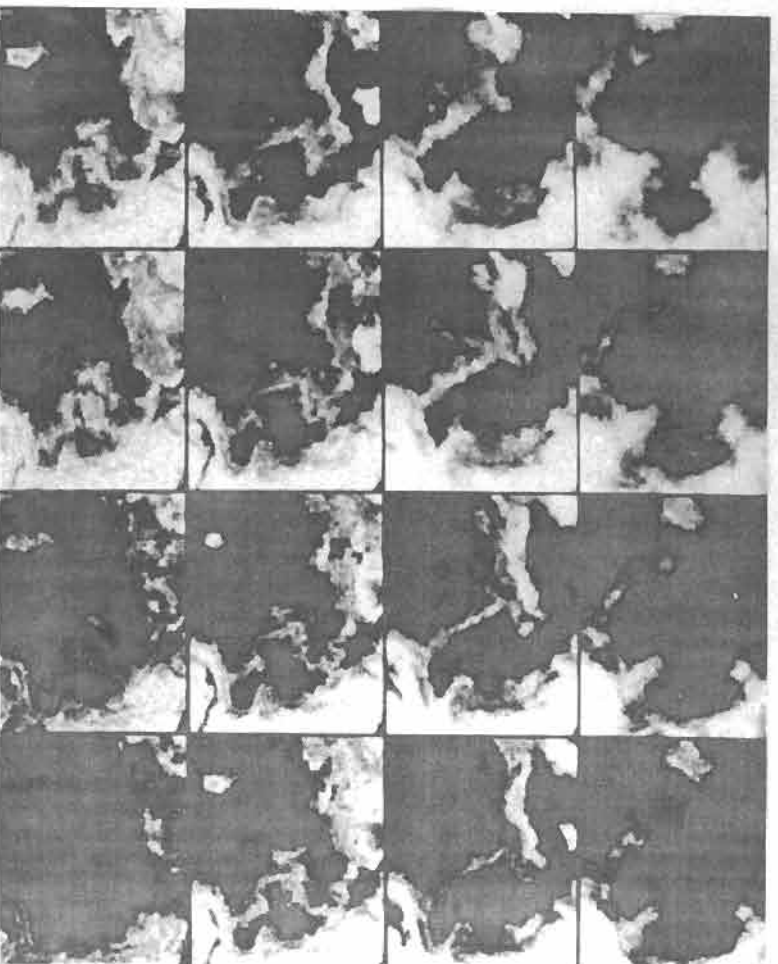


Bild 9: 16 Bilder aus einer Animation gemäß Gleichung (9). In dieser Sequenz wird der Effekt von ϵ allein untersucht. Im ersten Bild ist der Wert des Parameters ϵ noch 0, in jedem weiteren Bild wird der Parameter um 0.1 erhöht. $\Delta x = \Delta y = 0.0, \mu = 0.0$.

wobei die Variablen auf der rechten Seite funktional von u, v, w und t abhängen. Die Animationen können dann wie oben stattfindend, z. B. liefert

$$\begin{aligned} x(u, v, w, t) &= u + t \cdot \Delta x, \\ y(u, v, w, t) &= v + t \cdot \Delta y, \\ z(u, v, w, t) &= w + t \cdot \Delta z, \\ \alpha(u, v, w, t) &= t \cdot \Delta \alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Wolkenfelder in drei Dimensionen mit konstantem Wind und sich veränderndem Wolkenstrukturen. Die computergraphische Darstellung von 3D-Dichtefeldern ist ein aktuelles Forschungsthema und unter dem Stichwort *Volume Rendering* bekannt geworden, siehe z. B. [1] und die dort aufgeführte Literatur. Der Ansatz für die Dichtefelder der Wolken eignet sich gut, um für eine dreidimensionale Darstellung die notwendigen Linienintegrale effizient zu berechnen. Die numerischen Methoden hierzu werden entwickelt und sollen in einer anderen Arbeit vorgestellt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die beschriebenen Verfahren liefern überzeugende Wolkenbilder und -animationen. Dies gilt zumindest für den hier gezeigten Fall von Schönwetterwolken. Die Methode hat einige attraktive Eigenschaften. Die Frank-

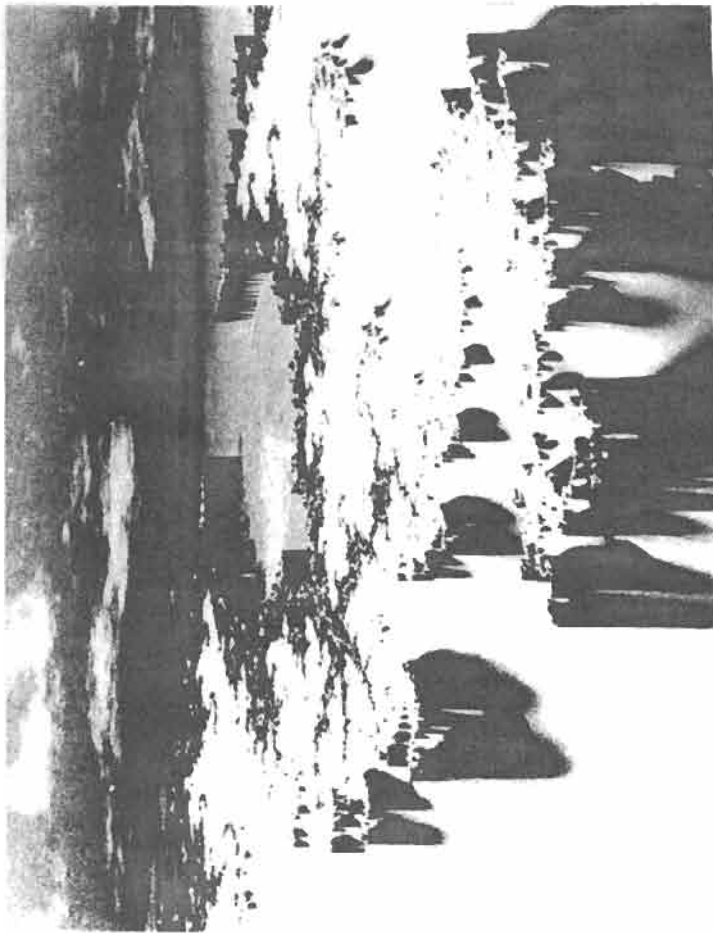


Bild 10: Titelbild von *The Science of Fractal Images* [8]. Der Himmel ist als Ebene mit Wolkentextur gemäß Abschnitt 3 und 4 berechnet.

talen Wolkenstrukturen sind unabhängig von der zugrundeliegenden Geometrie, sie können auf einer Ebene genauso wie auf einer Sphäre oder einem Polyeder berechnet werden. Das Verfahren fällt in die Kategorie des sog. *Functional Based Modeling*. Diesen Methoden ist die Einfachheit gemeinsam, mit der Modifikationen zur Kontrolle der Strukturen in Raum und Zeit erzielt werden können. Schließlich sind noch die relativ geringen Implementierungskosten und die hohe Geschwindigkeit der Generierung der Wolkenstrukturen bemerkenswert. Ein Nachteil des Verfahrens ist es, daß Wolken nicht so einfach wie bei Gardner in [3,4] interaktiv in einer Szene platziert werden können. Dies ließe sich erst durch geeignete Manipulation der Hilfsfunktionen S_n erreichen.

Eine Integration der Techniken als Werkzeug von Entwurfsarbeitsplätzen für Computeranimation ist denkbar und relativ einfach in einem graphisch interaktiven Programm realisierbar. Eine erste Version ist vom Verfasser auf einer Iris 4D/20 Workstation implementiert worden. Die folgenden Interaktionen sind darin vorgesehen:

- Festlegung der Animationsparameter über Tastatur oder graphisch über manipulierbare Kurven in getrennten Sichtfenstern für x, y, z, H, V_c .
- Festlegung eines aktuellen Zeitpunktes t in einem Fenster oder interaktiv gekoppelt an I/O-Geräte wie Maus oder Drehknopf.
- Simultane Anzeige des Standbildes, bzw. der Animation in einem kleinen Fenster unter Benutzung der einfachen Visualisierungsmethode. Bei einer geringen Anzahl von berechneten Punkten ist eine Echtzeitanimation mit etwa fünf Bildern pro Sekunde möglich.

Literatur

- [1] Drebin, R., Carpenter, L. und Hanrahan, P., *Volume rendering*, Computer Graphics 22,4 (1988) 65-74
- [2] Feder, J., *Fractals*, (Plenum Press, New York, 1988)
- [3] Gardner, G., *Visual simulation of clouds*, Computer Graphics 19,3 (1985) 297-304
- [4] Gardner, G., *Functional modeling of natural scenes*, in : SIGGRAPH Course Notes "Functional Based Modeling" (M. Inakage, Hrsg.), 1988
- [5] Musgrave, F. K., Kolb, C. und Mace, R. S., *The synthesis and rendering of eroded fractal terrain* Computer Graphics 23,3 (1989)
- [6] Lovejoy, S. und Mandelbrot, B.B., *Fractal properties of rain, and a fractal model*, Tellus 37A (1985) 209-232
- [7] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*, (W.H.Freeman and Co., New York, 1982)
- [8] Peitgen, H.-O. und Saupe, D. (Hrsg.), *The Science of Fractal Images*, (Springer-Verlag, New York, 1988)
- [9] Saupe, D., *Quick recipe for random fractal clouds*, Silicon Graphics Iris Universe, (Winter/Spring 1987) 12-13
- [10] Saupe, D., *Algorithms for random fractals*, in : The Science of Fractal Images, Peitgen, H.-O. und Saupe, D. (Hrsg.), (Springer-Verlag, New York, 1988) 71-113
- [11] Saupe, D., *Point evaluation of multi-variable random fractals*, erscheint in : Visualisierung in Mathematik und Naturwissenschaften, Bremer Computergraphik-Tage 1988, H. Jürgens, D. Saupe (Hrsg.), (Springer-Verlag, Heidelberg, 1989) 117-129
- [12] Voss, R.F., *Random fractal forgeries*, in : Fundamental Algorithms for Computer Graphics, R.A. Earnshaw (Hrsg.) (Springer-Verlag, Berlin, 1985) 805-835
- [13] Voss, R.F., *Fractals in nature : From characterization to simulation*, in : The Science of Fractal Images, Peitgen, H.-O. und Saupe, D. (Hrsg.), (Springer-Verlag, New York, 1988) 21-70