ZAMM 62, T 350 – T 351 (1982)

D. Saupe

Topologische Perturbationen zum Wechsel der Triangulierung in PL-Algorithmen

Stückweise lineare (PL) Methoden kommen zum Einsatz z. B. im numerischen Studium von nichtlinearen Eigenwert- und Verzweigungsproblemen. Die stetige Abbildung $F\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, deren Nullstellen zu bestimmen sind, wird hierbei durch $F_T\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ ersetzt. F_T ist *die zu* F *und einer Triangulierung* T *des* $\mathbb{R}^{n+1}$ *gehörige PL-Abbildung*: F_T stimmt mit F auf den Ecken von T überein und ist linear in den Simplexen von T. Mit Hilfe eines Pivotverfahrens werden Ketten sogenannter vollständig bewerteter n-Simplexe berechnet. Diese enthalten Nullstellen von F_T als Approximationen der Nullstellen von F (siehe [3]). In [4] ist ausgeführt, wie man mit einem Prädiktor/Korrektor-Verfahren diese Ketten bestimmt ohne sie selbst vollständig zu berechnen. In den PL-Verfahren ist es erstrebenswert, mit Triangulierungen verschiedener Maschenweite arbeiten zu können. Eine feinere Maschenweite ist angebracht, um z. B. einen Verzweigungs- oder Umkehrpunkt in $F^{-1}(0)$ genauer aufzulösen, während eine gröbere Maschenweite zwar die Güte der Approximation vermindert, dafür aber den Algorithmus „schneller" macht. Der in [4] dargestellte Korrektorschritt kann leicht zu dem Zweck der Änderung der Triangulierung benutzt werden.

Seien T und T_0 Triangulierungen des $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei $\sigma_0 \in T_0$ eine bezüglich F vollständig bewertete n-Seite des $(n+1)$-Simplexes $\tau_0 \in T_0$. Gesucht ist also ein vollständig bewertetes Simplex in T und in der Nähe von σ_0. Es gibt ein $x_0 \in \sigma_0$ mit $F_{T_0}(x_0) = 0$, und wir wählen $t \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ aus dem Kern der auf τ_0 eingeschränkten Abbildung F_{T_0}. Sei H die senkrecht zu t liegende Hyperebene durch x_0, d. h. $H = \gamma^{-1}(0)$ mit $\gamma(x) = (x - x_0)^t t$. Sei weiterhin für kleine $\varepsilon > 0$

$$\Gamma_\varepsilon^\pm = \{x \in \mathbb{R}^{n+1};\ \pm\gamma(x) \geqq \varepsilon\}\,,$$

$$G_\varepsilon\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n\,,$$

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} F(x) & \text{falls} \quad x \in \Gamma_\varepsilon^+\,, \\ -d & \text{falls} \quad x \in \Gamma_\varepsilon^-\,, \\ \dfrac{\gamma(x) + \varepsilon}{2\varepsilon}\, F(x) + \dfrac{\gamma(x) - \varepsilon}{2\varepsilon}\, d & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Damit ist eine *topologische Perturbation* im Sinne von [2] erklärt. Aus diesen Definitionen ergibt sich der folgende Hilfssatz.

Hilfssatz: *Sei $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $G_\varepsilon(x) = 0$. Dann ist entweder $x \in \Gamma_\varepsilon^r$ und $F(x) = 0$, oder es ist $|\gamma(x)| \leq \varepsilon$ und $F(x) = rd$ für ein $r \geqq 0$.*

Wählen wir $d = F(x_0)$, so ist $G_\varepsilon(x_0) = 0$ mit $r = 1$. Wir können erwarten, daß x_0 auf einem Kontinuum von Nullstellen von G_ε liegt, welches den Streifen $|\gamma(x)| \leqq \varepsilon$ in der Nähe von x_0 mit einer Nullstelle von F (mit $r = 0$) verläßt. Im regulären Fall, d. h. wenn F stetig differenzierbar in der Nähe von x_0 ist und dort die Ableitung maximalen Rang hat, und wenn d klein ist, folgt dies aus dem Satz über implizite Funktionen.

Zu G_ε definieren wir eine PL *Approximation* G_T mittels

$$G_T(v) = \begin{cases} F(v) & \text{falls} \quad \gamma(v) > 0 \\ -d & \text{sonst} \end{cases} ; \qquad v \text{ Ecke von } T\,.$$

Die Ketten der bezüglich G_T vollständig bewerteten Simplexe approximieren die Nullstellen von G_ε, und es ist eine solche bei x_0 zu finden und in der geeigneten Richtung zu verfolgen, bis ein vollständig bewertetes Simplex in Γ_ε gefunden ist. Durch eine geringfügige und unwesentliche Änderung von γ und d läßt es sich erreichen, daß diese Kette durch ein $(n+1)$-Simplex $\tau \in T$ mit $x_0 \in \tau$ geht.

Hilfssatz: *Sei $\gamma(x) \geqq 0$ für alle $x \in \tau$ und $H \cap \tau = \{v_j\}$. Bezeichne σ^j die v_j gegenüberliegende n-Seite von τ, und sei d im Inneren von $G_T(\sigma^j)$. Dann hat τ genau zwei bezüglich G_T vollständig bewertete n-Seiten.*

Der Beweis ergibt sich daraus, daß O im Inneren von $G_T(\tau)$ ist und daß $G_T(\tau) = G_T(\partial\tau)$ gilt. Die erste Voraussetzung kann man i. a. mit einer Addition einer kleinen Konstanten zum Funktional γ erfüllen. Die zweite Voraussetzung ist oft schon von selbst erfüllt, ansonsten genügt eine nur kleine Änderung von d.

Somit ist der Start für eine Kette vollständig bewerteter Simplexe bei x_0 gefunden, und es bleibt die Richtung, in der die Kette durch τ zu verfolgen ist, zu bestimmen. Diese ergibt sich aus den Orientierungen $\text{or}(\sigma, \tau)$ der vollständig bewerteten Simplexe $\sigma \subset \tau$. (Zu Orientierungen siehe [1, 3].) Hierzu sei o. E. d. A. noch vorausgesetzt, daß $\text{or}(\sigma_0, \tau_0) = +1$ und daß $\tau_0 \cap \{x + rt;\, x \in \sigma_0 \text{ und } r \geqq 0\} \neq \emptyset$. Wenn σ_1 und σ_2 die vollständig bewerteten n-Seiten von τ bezeichnen und $\text{or}(\sigma_1, \tau) = +1$, $\text{or}(\sigma_2, \tau) = -1$ gilt, dann ist die Kette der vollständig bewerteten Simplexe $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ zu berechnen. Damit ist sichergestellt, daß die Kette in T_0 durch τ_0 und in Richtung von t denselben Orientierungssinn hat wie die Kette in T durch τ. Dies ist notwendig, da schließlich beide Ketten dieselben Nullstellen von F approximieren sollen. Das in T gesuchte, bezüglich F vollständig bewertete Simplex ist gegeben durch das erste σ_k obiger Kette mit $\sigma_k \cap H = \emptyset$. Das folgende Bild veranschaulicht das hier beschriebene Verfahren.

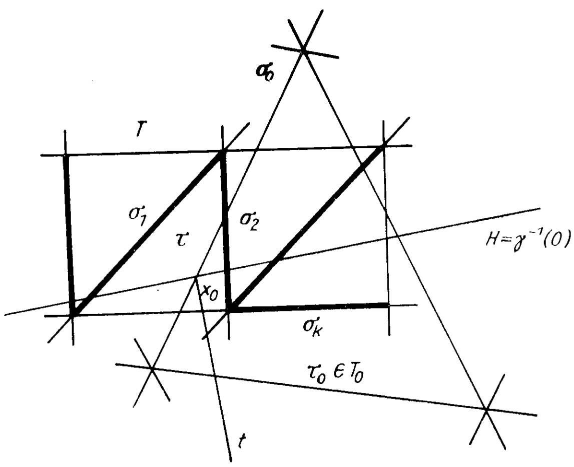

Bild 1

Es sei noch erwähnt, daß man sich mit Hilfe anderer PL-Verfahren einen Algorithmus für denselben Zweck konstruieren kann (siehe z. B. [2]). Die hier beschriebene Methode ist in Zusammenhang mit dem Prädiktor/Korrektor-Verfahren aus [4] interessant, da sie eine mit nur geringem Aufwand zu programmierende Ergänzung ist.

Literatur

1 Eaves, B. C., A short course in solving equations with PL-homotopies. SIAM-AMS Proceedings 9 (1976), 73–143.
2 Jürgens, H.; Peitgen, H.-O.; Saupe, D., Topological perturbations in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems. In: Robinson, S. M. (Ed.), Analysis and Computation of Fixed Points, New York: Academic Press 1980, S. 139–181.
3 Peitgen, H.-O.; Prüfer, M., The Leray-Schauder continuation method is a constructive element in the numerical study of nonlinear eigenvalue and bifurcation problems. In: Peitgen, H.-O.; Walther, H. O. (Ed.), Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, Lecture Notes 1979, S. 326–409.
4 Saupe, D., On accelerating PL continuation algorithms by predictor corrector methods, erscheint in Math. Program.

Anschrift: Dietmar Saupe, Forschungsschwerpunkt Dynamische Systeme, Fachbereich Mathematik, Universität Bremen, D-2800 Bremen 33, BRD