

Kalibrierung eines Leistungs-Geschwindigkeits-Modells für Rennradfahrten mit realen Leistungs- und Höhendaten

1 Einleitung

Im Rahmen des Powerbike Projektes wird an der Universität Konstanz ein System zur Datenerfassung, Modellierung, Analyse, Optimierung und Visualisierung von Leistungsparametern bei Einzelzeitfahrten auf realen Rennradstrecken entwickelt (Dahmen, Byshko, Saupe, Röder und Mantler, 2010)

Zur möglichst exakten Modellierung des Zusammenhangs zwischen der Pedalleistung P und der Fahrgeschwindigkeit v ist neben einer genauen Messung des Höhenprofils eine exakte Bestimmung der übrigen Modellparameter zur Beschreibung der mechanischen Widerstände erforderlich (Kalibrierung).

Literaturwerte können nur eine Näherung sein, da sie an die spezifischen Bedingungen wie Fahrer, Rennrad oder Straßenbelag angepasst werden müssen. Andererseits erfordert die Messung beispielsweise des spezifischen Windwiderstandskoeffizienten im Windkanal einen unangemessenen technischen Aufwand.

In diesem Beitrag soll daher ein einfaches, präzises Kalibrierungsverfahren vorgestellt und evaluiert werden. Dazu ist neben der Kenntnis des Höhenprofils ein Pedalleistungs- und Geschwindigkeitsmesssystem an einem Rennrad erforderlich.

Im folgenden Abschnitt wird das verwendete P - v -Modell vorgestellt. Das Kalibrierungsverfahren wird in Abschnitt 3 erläutert bevor in Abschnitt 4 exemplarische Ergebnisse diskutiert werden.

2 Das Leistungs-Geschwindigkeits-Modell

In den 1980er Jahren wurden Modelle entwickelt, die den Zusammenhang zwischen der mechanischen Pedalleistung P und der Fahrgeschwindigkeit v bei Einzelzeitfahrten im Rennradsport beschreiben. Die Modellgleichung beruht auf dem Kräftegleichgewicht zwischen der Pedalkraft und den mechanischen Widerstandskräften. Nachdem die Leistungsmessung durch das SRM Power Meter 1994 ermöglicht wurde, konnte sich ein Standardmodell etablieren, welches durch Martin, Milliken, Cobb, McFadden und Coggan (1998) auf ebenen Strecken validiert wurde. Die Modellgleichung kann aus dem Kräftegleichgewicht der Antriebskraft P/v , der Trägheitskraft F_t , der Gravitationskraft F_g , der Rollreibungskraft F_r , der Lagerreibungskraft F_l und der Windwiderstandskraft F_w hergeleitet werden. Es ergibt sich eine nicht-lineare Differentialgleichung:

$$\underbrace{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)}_{F_t} \dot{v} = \frac{(1 - \gamma)P}{v} - \underbrace{mg \frac{dh}{dx}}_{F_g} - \underbrace{mg\mu}_{F_r} - \underbrace{\beta_0 - \beta_1 v}_{F_l} - \underbrace{\frac{1}{2} c_d \rho A v^2}_{F_w}.$$

Tab. 1 gib eine Übersicht über die Parameter und einige Standardwerte aus der Literatur (z. B. Wilson, 2004).

Tab. 1. Parameter des P - v -Modells

Bekannte oder leicht messbare Parameter			Konstante, spezifische, schwer messbare Parameter		
Gravitationskonstante	g	9,81 m/s ²	Kettenreibungsverluste	γ	2,5 %
Luftdichte	ρ	1,2 kg/m ³	Rollreibungskoeffizient	μ	0,004
Trägheitsmoment Laufräder	I	0,31 kgm ²	Lagerwiderstandskoeffizient	β_0	0,091 N
Masse (Fahrer + Fahrrad)	m	zu messen	Lagerwiderstandskoeffizient	β_1	0,0087 Ns/m
Radius der Räder	r	zu messen	Luftwiderstandskoeffizient	c_d	0,7
Höhenprofil	$h(x)$	zu messen	frontale Fläche	A	0,4 m ²

Wir eliminieren die für uns irrelevante Zeit durch Division durch $v = dx/dt$:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} \underbrace{\left(\frac{P}{v^2} - \gamma \frac{P}{v^2} - \frac{mg}{v} \frac{dh}{dx} - (mg\mu + \beta_0) \frac{1}{v} - \beta_1 - \frac{1}{2} c_d \rho A v \right)}_Q$$

Diese Modellgleichung enthält das Steigungsprofil der Strecke dh/dx und 11 weitere physikalische Parameter aus Tab. 1, die mit guter Näherung als konstant angenommen werden können. Davon sind g , ρ und I (Herstellerangabe) bekannt und die Größen m , r , und $h(x)$ können gemessen werden (linke Spalte).

Die übrigen sechs Parameter γ , μ , β_0 , β_1 , c_d und A (rechte Spalte) sind zwar konstant, können aber nur mit großem technischen Aufwand ermittelt werden. Diese Parameter sind spezifisch für den Fahrer, das Fahrrad oder die Strecke.

3 Kalibrierung der Parameter

Um ein möglichst genaues, spezifisches Modell zu bestimmen, werden in dieser Arbeit Höhenprofile von realen Radstrecken gemessen und es wird untersucht, ob die sechs unbekanntem physikalischen Parameter aus gemessenen Leistungs- und Geschwindigkeitsdaten auf diesen Strecken geschätzt werden können.

3.1 Kalibrierungsverfahren

Die sechs gesuchten Modellparameter treten in dem Ausdruck Q in der Modellgleichung in vier Summanden auf, die sich alle in ihrer Art der Abhängigkeit von P und v unterscheiden. Daher können aus Messdaten grundsätzlich nur vier Koeffizienten geschätzt werden, zu denen die sechs physikalischen Parameter zusammengefasst werden müssen. Dazu definieren wir den Parametervektor

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ mg\mu + \beta_0 \\ \beta_1 \\ \frac{1}{2} c_d \rho A \end{pmatrix}$$

und erhalten unsere Modellgleichung in der Form

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{\left(m + \frac{I}{r^2}\right)} \left(\frac{P}{v^2} - k_1 \frac{P}{v^2} - \frac{mg}{v} \frac{dh}{dx} - k_2 \frac{1}{v} - k_3 - k_4 v \right).$$

Wenn alle bekannten oder messbaren Parameter und zusätzlich Leistungsmesswerte $P_m(x)$ verfügbar sind, ist die vom Modell geschätzte Geschwindigkeit \check{v} als Funktion von x und dem Parametervektor \mathbf{k} mit dieser Gleichung implizit definiert:

$$\check{v}(x, \mathbf{k}) = v(x, \mathbf{k}; g, \rho, I, m, r, h(x), P_m(x)).$$

Wir wollen \mathbf{k} so wählen, dass $\check{v}(x)$ möglichst nah an den zu $P_m(x)$ gehörenden Geschwindigkeitsmessungen $v_m(x)$ liegt. Hierzu definieren wir das Zielfunktional

$$J(\mathbf{k}) = \frac{1}{L} \int_0^L (\check{v}(x, \mathbf{k}) - v_m(x))^2 dx$$

als mittlere quadratische Abweichung über der Streckenlänge L und bestimmen den optimalen Parametervektor \mathbf{k}_{opt} , indem wir J minimieren:

$$\mathbf{k}_{opt} = \arg \min J(\mathbf{k}).$$

3.1 Datenaufzeichnung auf den Versuchsstrecken

Wir erfassen die Koordinaten einer 1060 m langen Asphaltstraße (Kalibrierungsstrecke) in Abständen von ca. 1 m mit einem Differential-GPS-Gerät (Leica GPS900). Die Strecke ist bewusst flach gewählt, damit der Einfluss der zu bestimmenden Parameter auf die Widerstandskraft nicht zu stark von der Gravitationskraft überdeckt wird. Das Steigungsprofil ist in Abb. 1 gezeichnet. Die Geräteangabe für die Koordinatenqualität ist für alle Punkte besser als 1,8 cm.

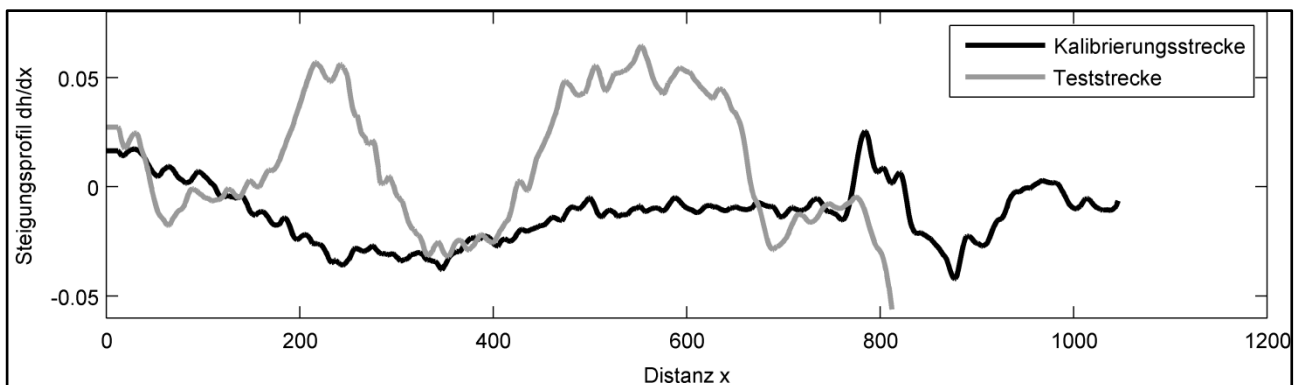


Abb. 1. Die Steigungsprofile der Kalibrierungsstrecke und der Teststrecke

Ein Fahrer fährt bei Windstille mit einem Rennrad die Kalibrierungsstrecke vier Mal abwechselnd in beide Richtungen. Dabei deckt er das mögliche Geschwindigkeitsspektrum gut ab, und verändert seine Körperhaltung nicht. P_m und v_m werden mit einem SRM Power Meter gemessen. Mit diesen Daten wird die Kalibrierung durchgeführt. In gleicher Weise wird eine 813 m lange Teststrecke mit vergleichbarem Fahrbahnbelag gemessen und befahren. Abb. 1 zeigt das Steigungsprofil.

Mit den Lösungskoeffizienten \mathbf{k}_{opt} der Kalibrierungsstrecke berechnen wir eine Modellschätzung für die Geschwindigkeit bei den Fahrten auf der Teststrecke und vergleichen diese mit der dort gemessenen Geschwindigkeit.

4 Ergebnisse der Kalibrierung

4.1 Kalibrierungsfahrten

Abb. 2 zeigt, dass die vom Modell unter Verwendung der Literaturparameter berechnete Geschwindigkeit $v_{lit}(x)$ allgemein größer ist als die gemessene Geschwindigkeit $v_m(x)$. Die vom Modell unter Verwendung der Parameter k_{opt} berechnete Geschwindigkeit $v_{kal}(x) = \check{v}(x, k_{opt})$ stimmt mit den Messwerten besser überein.

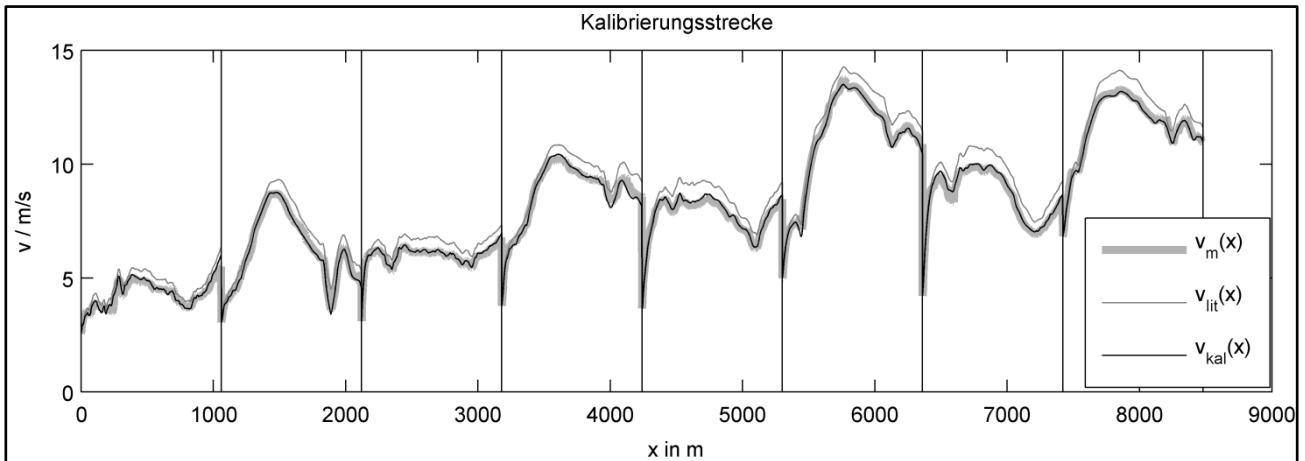


Abb. 2. Gemessene Geschwindigkeit $v_m(x)$, vom Modell unter Verwendung der Literaturparameter berechnete Geschwindigkeit $v_{lit}(x)$, vom Modell unter Verwendung der Parameter k_{opt} berechnete Geschwindigkeit $v_{kal}(x)$ auf der Kalibrierungsstrecke. Die senkrechten Balken verdeutlichen Richtungswechsel an den Streckenenden.

Tab. 2 vergleicht die Parameter k_{lit} , die aus Literaturwerten berechnet werden können mit k_{opt} .

Tab. 2. Kalibrierte Parameter des P - v -Modells

	k_1	k_2	k_3	k_4
Standardliteraturwerte k_{lit}	2,5 %	3,41 N	0,0087 Ns/m	0,168 kg/m
Kalibrierte Werte k_{opt}	6,8 %	4,40 N	0,04 Ns/m	0,182 kg/m

Kleine relative Abweichungen in den Messgrößen können große relative Änderungen in den Parametern k_1 und k_3 verursachen. Diese Parameter sind so klein, dass sie nur einen geringen Einfluss haben und daher auch nicht so robust geschätzt werden können wie k_2 und k_4 .

4.2 Testfahrten

Abb.3. zeigt die gleichen Kurven für die Teststrecke, wobei für die Berechnung der Geschwindigkeit $v_{kal}(x)$ die Parameter k_{opt} von der Kalibrierstrecke verwendet wurden. Die Verbesserung der Modellgenauigkeit im Sinne des mittleren Fehlers und der Standardabweichung des Fehlers kann also auch auf anderen Strecken beobachtet werden (Tab. 3).

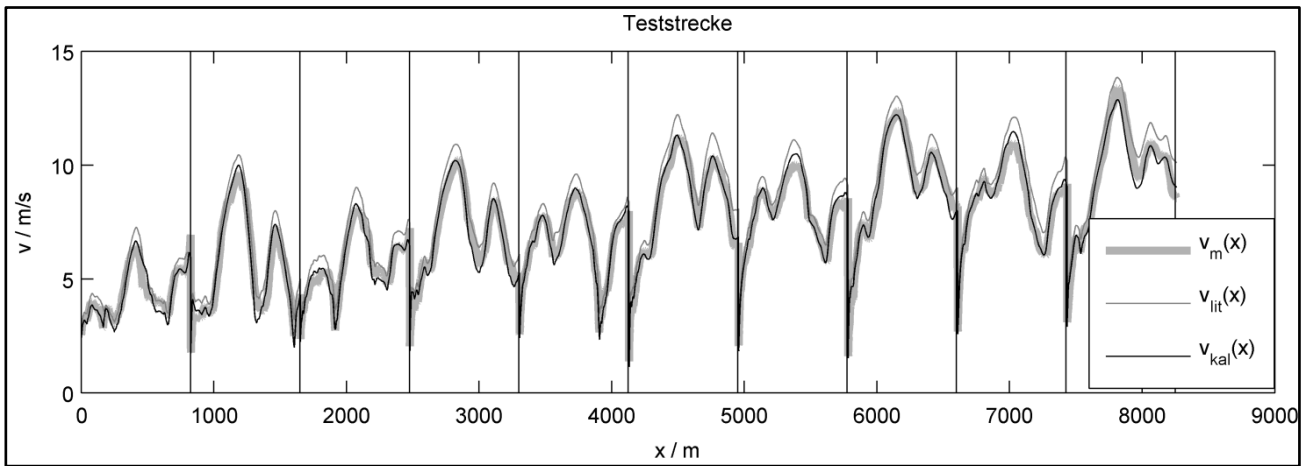


Abb. 3. Gemessene Geschwindigkeit $v_m(x)$, vom Modell unter Verwendung der Literaturparameter berechnete Geschwindigkeit $v_{lit}(x)$, die vom Modell unter Verwendung der Parameter k_{opt} berechnete Geschwindigkeit $v_{kal}(x)$ auf der Teststrecke. Die senkrechten Balken verdeutlichen Richtungswechsel an den Streckenenden.

Tab.3. Vergleich des Modellfehlers auf der Teststrecke

	Mittlerer Fehler	Standardabweichung
Standardliteraturwerte	0,68 m/s	0.31 m/s
Kalibrierte Werte	0.12 m/s	0.26 m/s

5 Schlussfolgerungen und Fazit

Mit Hilfe der vorgestellten Kalibrierungsmethode können die Parameter eines fahrer-, fahrrad- und fahrbahnspezifischen Modells bestimmt werden, welches den Zusammenhang zwischen der Pedalleistung und der Fahrgeschwindigkeit beim Rennradfahren in Form einer Differentialgleichung präzise beschreibt.

Dazu muss das Höhenprofil der Strecke mit genügender Genauigkeit bekannt und ein Leistungs- und Geschwindigkeitsmesssystem verfügbar sein. Die gewonnenen Parameter können aber nicht eindeutig den mechanischen Widerstandskomponenten zugeordnet werden. Nur zwei der vier Parameter haben einen signifikanten Einfluss und können entsprechend robust geschätzt werden.

Einschränkend sollte ergänzt werden, dass die Genauigkeit von Leistungsmessgeräten nicht wissenschaftlich untersucht ist. Parallelmessungen mit Geräten verschiedener Hersteller offenbaren nicht selten Abweichungen von bis zu 10%, Dieser Messfehler kann die Parameterschätzung maßgeblich beeinflussen.

Literatur

Dahmen, T., Byshko, R., Saupe, D., Röder, M. & Mantler, S. (2010). *Validation of a model and of a simulator for road cycling on real tracks*. Submitted.

Martin, J.C., Milliken, D.L., Cobb, J.E., McFadden, K.L. & Coggan, A.R. (1998). Validation of mathematical model for road cycling power. *Journal of Applied Biomechanics*, 14, 276-291.

Wilson, D.G. (2004). *Bicycling Science, 3rd Edition*. Cambridge, MA: The MIT Press.